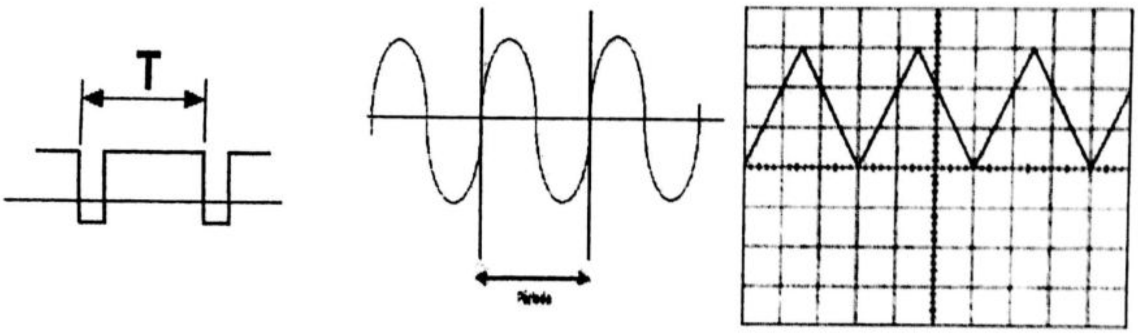
Chapitre 4

4 -1 Introduction

Les grandeurs variables périodiques sont des grandeurs qui évoluent au cours du temps ; tension, intensité, température... On appelle grandeur périodique toute grandeur qui se reproduit identiquement à elle-même à partir d'un certain temps. On peut visualiser une tension périodique avec un oscilloscope.

4-2 Caractéristiques d'une grandeur périodique.



Quelques exemples de signale periodique

Le signale périodique est caractérisé par :

- La **fréquence (Symbole f)**, mesurée en hertz ($Hz=s^{-1}$). C'est le nombre de répétition de signal effectué en une seconde.
- **La période** est le temps de signale relié à la fréquence par la relation suivante :

$$T=1/f$$

- **L'alternance:** est égale à la période divisée par 2 (T/2)
- **L'amplitude:** C'est la valeur maximum prise à chaque alternance
- **La Valeur instantanée** f ou $f(t)$: la fonction elle-même.
- **La valeur moyen** d'un signale représenté par la fonction f est calculer par :

$$f_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

La valeur moyenne d'un courant périodique est égale à l'intensité du courant continu qui fournirait la même charge (q = I0 T) pendant une période.

- **La Valeur efficace f_{eff}** est donnée par:

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$$

4-3 Régime permanent sinusoïdal (A.C.)

On parle de régime permanent sinusoïdal lorsque l'évolution temporelle des signaux correspond à des sinusoïdes. La forme générale d'un signal sinusoïdal est donc :

$$i(t) = I_{max}\sin(\omega t + \varphi)$$

Phase instantanée : $\omega t + \varphi$

Phase à l'origine ou déphasage : φ

Pulsation : ω

Période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

La valeur moyenne est donné par :

$$I_{moyen} = \frac{1}{T}\int_0^T I_{max}\sin(\omega t + \varphi)\,dt = 0$$

La valeurs efficace est donné par :

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2{}_{max}\sin^2(\omega t + \varphi)\,dt} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

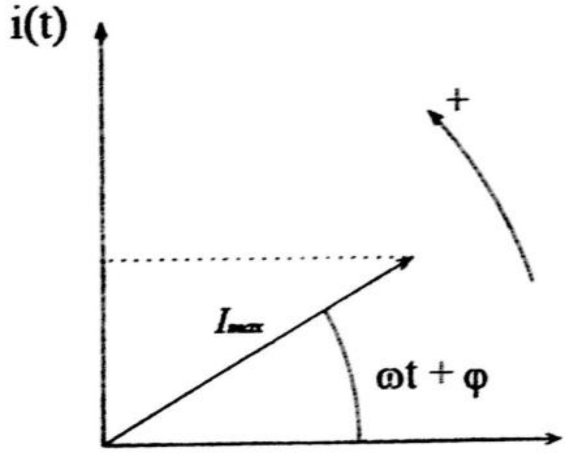
4-4 Représentations de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

Pour faciliter les calculs il est possible de faire appel à deux représentations des grandeurs sinusoïdales. Ces deux représentations consistent à associer à une grandeur sinusoïdale un vecteur tournant dans un plan. La projection de ce vecteur sur un des deux axes peut alors donner accès à la grandeur considérée.

La représentation peut être graphique, il s'agit de la représentation de **Fresnel**. Elle peut être analytique. En effet à tout vecteur on peut associer un nombre complexe dont la partie réelle est égale à une composante de ce vecteur et la partie imaginaire à l'autre composante dans un repère orthonormé.

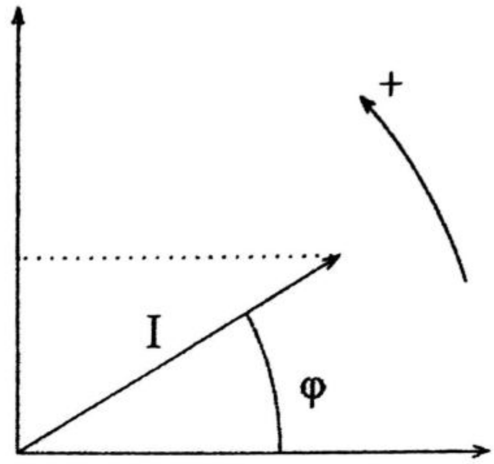
a) Représentation de Fresnel

Le vecteur de Fresnel associé à un signal sinusoïdal est un vecteur tournant dont la vitesse angulaire est égale à la pulsation du signal. La norme de ce vecteur est égale à l'amplitude du signal et l'angle polaire est à tout instant égal à la phase instantanée du signal. La valeur algébrique du signal est donnée par la projection du vecteur tournant sur l'axe vertical :



$$i(t) = I_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$

Lorsqu'on ne compose que des signaux de même période, on ne s'intéresse en fait qu'aux déphasages relatifs. Il n'est donc pas nécessaire de faire tourner la figure. On se contente d'un vecteur fixe ayant pour norme l'amplitude du signal et pour angle polaire son déphasage



b) La somme de deux grandeurs sinusoïdales en utilisant la représentation de Fresnel

Intéressons nous à la somme de deux fonctions sinusoïdales de même fréquence :

Supposons les deux grandeurs suivantes :

$$y1 = a1sin(wt + \varphi1) = a1(sinwtcos\varphi1 + coswtsin\varphi1)$$

$$y2 = a2sin(wt + \varphi2) = a2(sinwtcos\varphi2 + coswtsin\varphi2)$$

La somme des deux grandeurs est :

$$Y(t) = y1(t) + y2(t)$$

On obtient

$$\boxed{Y(t) = (a1cos\varphi1 + a2cos\varphi2)sinwt + (a1sin\varphi1 + a2sin\varphi2)coswt}$$

Nous pouvons introduire deux paramètres réels pour simplifier :

$$a1cos\varphi1 + a2cos\varphi2 = Acos\phi$$

$$a1sin\varphi1 + a2sin\varphi2 = A\,sin\phi$$

Avec :

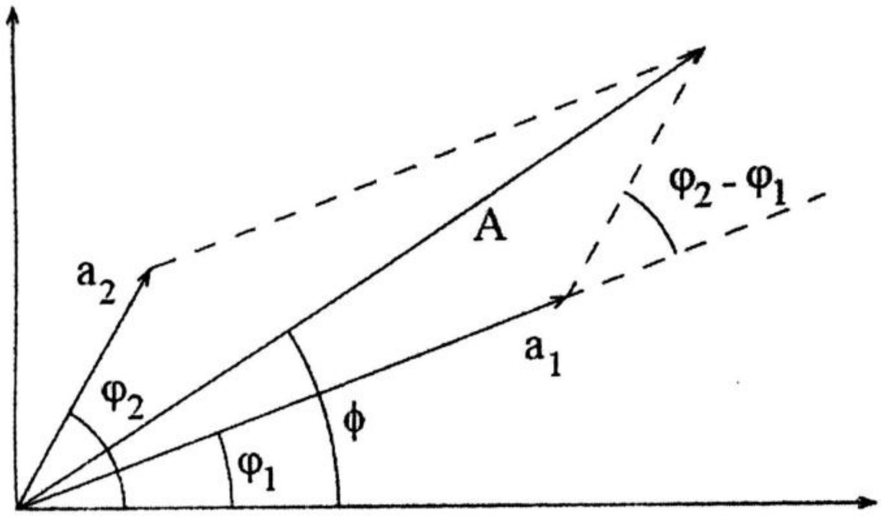
$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a1a2\,cos(\varphi1 - \varphi2)$$

$$tan\emptyset = \frac{a1sin\varphi1 + a2sin\varphi2}{a1cos\varphi1 + a2cos\varphi2}$$

Donc

$$Y(t) = A(sinwt\, cos\emptyset + coswt\, sin\emptyset) = A\, sin(wt + \emptyset)$$

Cette expression peut être obtenus directement en utilisant la représentation de Fresnel



c) Dérivé et intégrale des grandeurs sinusoïdale périodique et la représentation de Fresnel

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la mise en équation de certains dipôles fait intervenir la dérivation ou l'intégration. Essayons de voir comment peuvent se traduire ces opérations dans la représentation de Fresnel. Considérons une fonction sinusoïdale

$$Y(t) = asin(wt + \varphi)$$

La dérivée de cette fonction donne :

$$\frac{dY(t)}{dt} = w.a.cos(wt + \varphi) = w.a.sin(wt + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

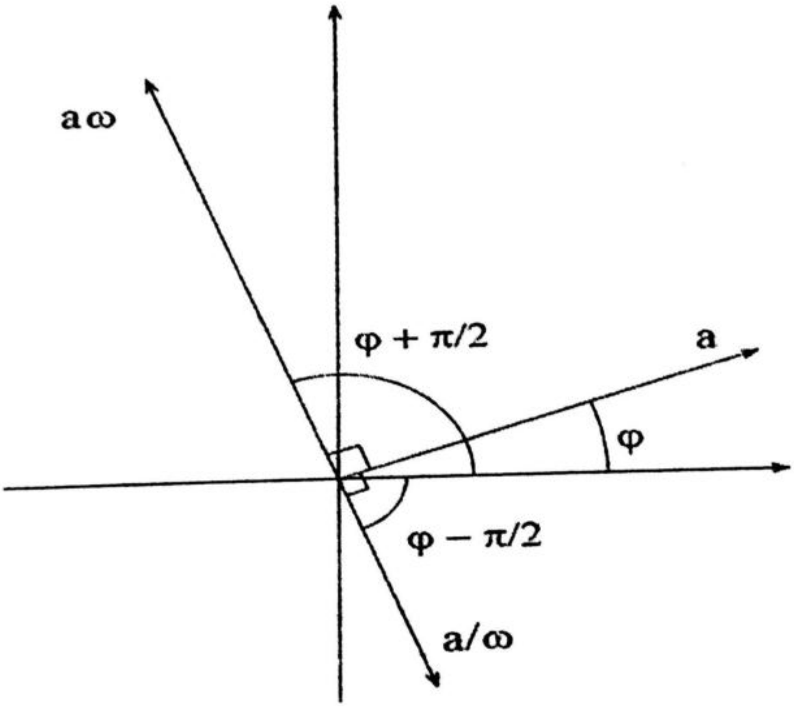
La dérivée correspond à la multiplication de l'amplitude par la pulsation w et se trouve en quadrature avance par rapport au signal initial.

Pour l'intégrale on aura :

$$\int Y(t) = -\frac{a}{w}.cos(wt+\varphi) = \frac{a}{w}\,sin(wt+\varphi\ -\frac{\pi}{2})$$

La primitive correspond à la division de l'amplitude par la pulsation w et se trouve en quadrature retard par rapport au signal initial

On résume ces deux opérations par la présentation de Fresnel suivante :



4-5 Notation complexe

A toute fonction sinusoïdale d'amplitude a et de phase instantanée wt+φ nous pouvons faire correspondre un nombre complexe défini par :

$$\boxed{\overline{Y(t)} = a[cos(wt+\varphi) + jsin(wt+\varphi] = ae^{j(wt+\varphi)} = ae^{jwt}e^{j\varphi}}$$

Avec : $j^2 = -1$

Pour la dérivée

$$\frac{\overline{dY(t)}}{dt} = jwae^{j(wt+\varphi)} = jw\overline{Y(t)}$$

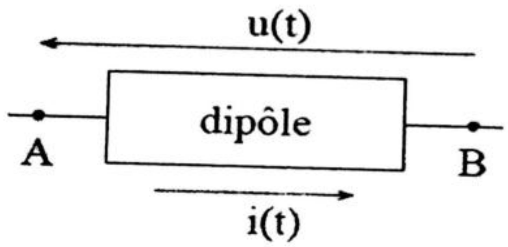
Pour l'intégrale :

$$\int \overline{Y(t)} = \frac{a}{jw}e^{j(wt+\varphi)} = \frac{1}{jw}\overline{Y(t)}$$

4-5-1 Impédances complexes

On appelle impédance d'un dipôle linéaire passif (résistance, capacité ou self) la grandeur complexe Z(jw) qui relie dans la représentation complexe la tension au courant :

a) Résistances



u(t)=R i(t)

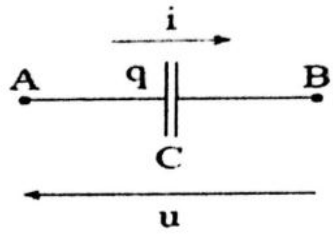
en notation complexe

$$\bar{u}(t) = Ue^{jwt}$$

$$\bar{u}(t) = \bar{Z}(jw)\bar{\iota}(t)$$

$$\boxed{\bar{Z}(jw) = R}$$

b) Condensateur :



On sait que

$$i(t) = C\,\frac{dU(t)}{dt}$$

En notation complexe :

$$\bar{\imath}(t) = C\,\frac{d\bar{u}(t)}{dt} = jwCUe^{jwt} = jwC\bar{u}(t)$$

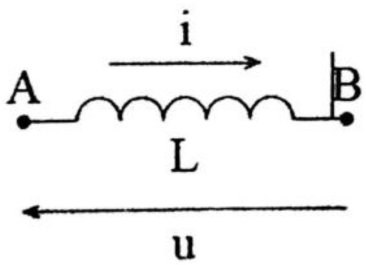
Or on a

$$\bar{u}(t) = \bar{Z}(jw)\bar{\imath}(t)$$

Donc pour le condensateur :

$$\boxed{\bar{Z}(jw) = \frac{1}{jwC} = \frac{1}{wC}e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

c) Inductance :

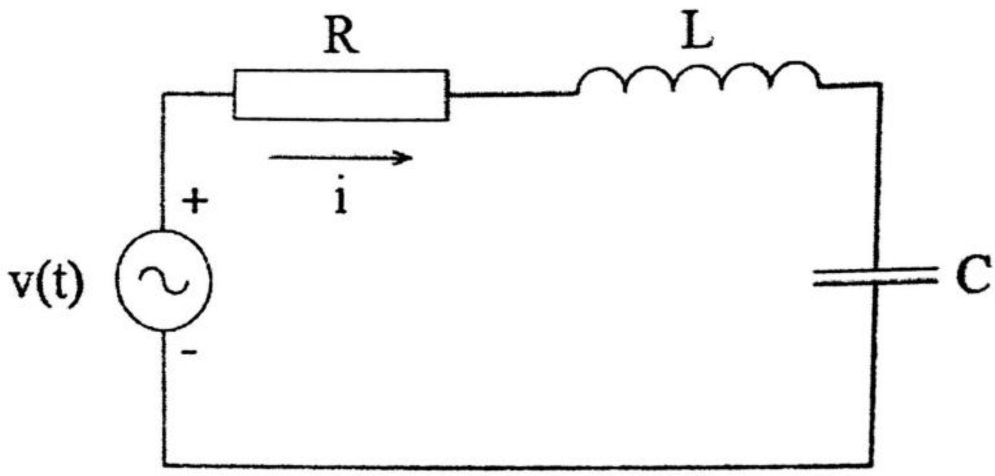


De la même façon on trouve pour une bobine l'impédance s'écrit :

$$\boxed{\bar{Z}(jw) = j.w.L = w.L.e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

4-6 Etude de Circuit d'impédance (RLC)

Considérons un circuit RLC soumis à une excitation sinusoïdale $v(t) = V \sin wt$. Etudions le courant i(t), lorsque le régime permanent est atteint :



La loi de maille nous donne :

$$V(t) = u_c + u_L + u_R$$

$$\boxed{V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)}$$

Si on dérive cette équation par apport au temps on obtient :

$$\boxed{\frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) + L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt}}$$

La solution d'une telle équation est la superposition d'une solution de l'équation sans second membre (le régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation complète (le régime permanent).

Comme v(t) est une fonction sinusoïdale de pulsation ω, on peut choisir une solution particulière de l'équation complète de la forme : i(t) = I sin (wt −φ) . Nous pouvons résoudre l'équation différentielle en utilisant la notation complexe :

$$\bar{V}(t) = Ve^{jwt}$$

$$\bar{\imath}(t) = Ie^{j(wt-\varphi)}$$

L'équation différentielle donne

$$\bar{V}(t) = \left[R + j(Lw - \frac{1}{Cw})\right]\bar{\imath}(t)$$

Donc l'impédance est donnée par :

$$\bar{Z}(t) = \left[R + j(Lw - \frac{1}{Cw})\right] = Z_{reel} + Z_{im}(jw)$$

où Z_{im}(jw) est la réactance du circuit

le module de $\bar{Z}$ est donné par :

$$Z = |\bar{Z}(t)| = \sqrt{R^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2}$$

Nous pouvons réécrire la relation entre la tension et l'intensité sous la forme :

$$\bar{V}(t) = \bar{Z}.\bar{\imath}(t) = \left[R + j(Lw - \frac{1}{Cw})\right]\bar{\imath}(t)$$

$$Ve^{jwt} = \left[R + j(Lw - \frac{1}{Cw})\right]Ie^{j(wt-\varphi)}$$

Multiplions chacun des deux membres par son conjugué, nous obtenons :

$$V^2 = I^2\left[R^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2\right]$$

D'où :

$$V^2 = I^2 Z^2$$

$$Z = \frac{V}{I}$$

D'autre part, pour déterminer le déphasage de l'intensité par rapport à la source de tension, nous avons :

$$V = \left[R + j(Lw - \frac{1}{Cw})\right] I e^{-j\varphi}$$

$$Ve^{j\varphi} = \left[R + j(Lw - \frac{1}{Cw})\right] I$$

$$V(cos(\varphi) + jsos(\varphi)) = \left[R + j(Lw - \frac{1}{Cw})\right] I$$

$$cos(\varphi) = \frac{R}{V} I$$

$$sin(\varphi) = \frac{(Lw - \frac{1}{Cw})}{V} I$$

$$\boxed{Tan(\varphi) = \frac{(Lw - \frac{1}{Cw})}{R}}$$

Et

$$\boxed{cos(\varphi) = \frac{(R)}{Z}}$$

Cos(φ) >0 ce qui implique que : $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

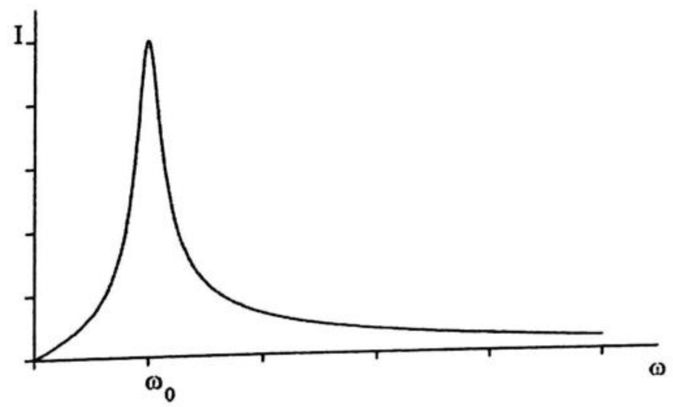
L'impédance du circuit RLC varie avec la pulsation. Elle est minimale pour la pulsation propre du circuit :

$$(Lw - \frac{1}{Cw}) = 0$$

Ceci implique que $w = w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Dans ce cas : Z=Zmin=R

L'intensité est alors en phase avec la source de tension. La courbe ci-dessous montre la variation de l'amplitude de l'intensité (ou sa valeur efficace) pour une tension donnée en fonction de la pulsation de la source. Nous avons un phénomène de résonance à w_0 (la valeur de l'intensité est maximum)



Calculons pour quelle pulsation nous avons :

$$Z = \sqrt{2}\,R$$

Dans ce cas on aura :

$$Z = \sqrt{2}\,R = \sqrt{R^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2}$$

$$R^2 + (Lw - \frac{1}{Cw})^2 = 2R^2$$

$$Lw - \frac{1}{Cw} = \pm R$$

Ceci nous entraine à chercher la solution de l'équation suivante :

$$LCw^2 \pm RCW - 1 = 0$$

$$\Delta = (RC)^2 + 4LC > 0$$

Donc on a la solution s'écris sous forme :

$$w = \frac{\pm RC \pm \sqrt{\Delta}}{2LC}$$

On garde que les solutions positives (la pulsation est positive) :

$$\boxed{w_1 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}}$$

$$\boxed{w_2 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}}$$

On définit le facteur de qualité du circuit RLC comme :

$$\boxed{Q = \frac{w_0}{|w_1 - w_2|}}$$

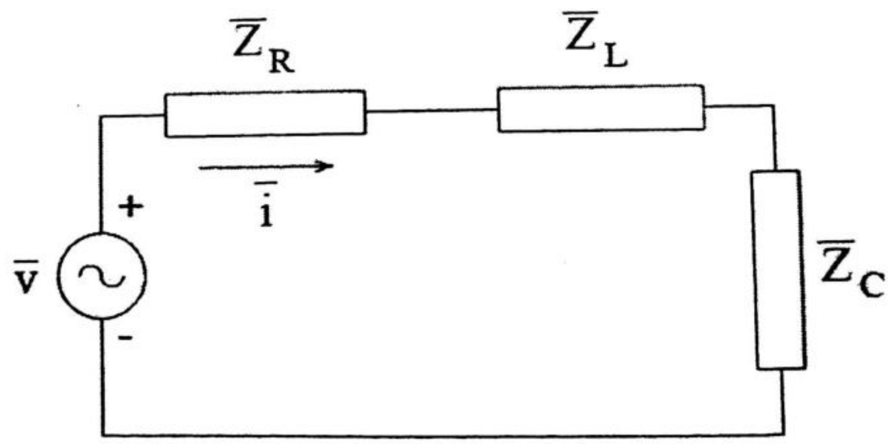
Ce facteur de qualité caractérise la largeur de la résonance. Celle-ci est d'autant plus étroite que le facteur de qualité est grand. En reportant les expressions des trois pulsations nous obtenons pour le facteur de qualité :

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{R}}}$$

4-7 Notation complexe et lois de base

Grâce à la notation complexe toutes les lois de base (nœuds, mailles, association en série, association en parallèle, superposition, Norton, Thévenin, Millman, etc.) qui ont été obtenues pour les réseaux de résistances en régime continu restent valables en régime permanent sinusoïdal, les impédances jouant le rôle des résistances. C'est-à-dire qu'il est possible d'écrire les équations régissant l'étude d'un circuit sans passer par les équations différentielles.

Reprenons l'exemple précédent de circuit RLC. Remplaçons chaque dipôle par son impédance, nous pouvons modéliser le circuit comme indiqué sur la figure ci-dessous. En procédant à partir de ce schéma comme nous savons le faire en régime continu, nous pouvons écrire :



La loi de maille pour ce circuit est donné par :

$$\bar{V} = \bar{u}_R + \bar{u}_L + \bar{u}_C$$

$$\bar{V} = \bar{Z}_R\bar{\imath} + \bar{Z}_L\bar{\imath} + \bar{Z}_C\bar{\imath} = \bar{Z}\bar{\imath}$$

Nous retrouvons la même relation que le paragraphe précèdent :

$$\bar{V} = \left[R + j(Lw - \frac{1}{Cw})\right]\bar{\imath}$$

Remarque :

L'impédance équivalente pour des impédances en parallèle est donnée par :

$$\frac{1}{Zeq} = \sum \frac{1}{Z_i}$$

En serie :

$$Zeq = \sum Z_i$$

a) Puissance en régime sinusoïdal

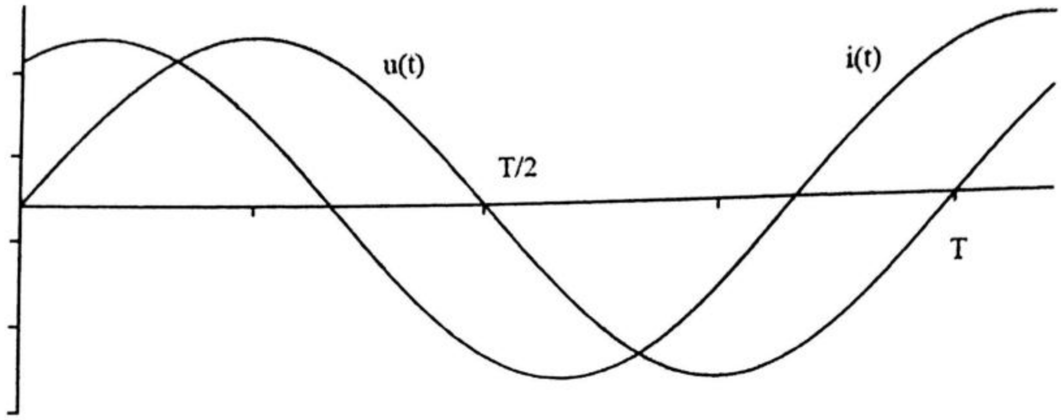
Nous avons vu qu'en convention récepteur la puissance reçue par un dipôle s'écrit :

$$p(t) = u(t)\, i(t)$$

En régime sinusoïdal, la tension et l'intensité sont des fonctions sinusoïdales de même pulsation.

Notons φ le déphasage de la tension par rapport à l'intensité. Un choix de l'origine des temps nous permet donc d'écrire :

$$i(t) = I\sin(wt)$$
$$u(t) = U\sin(wt + \varphi)$$



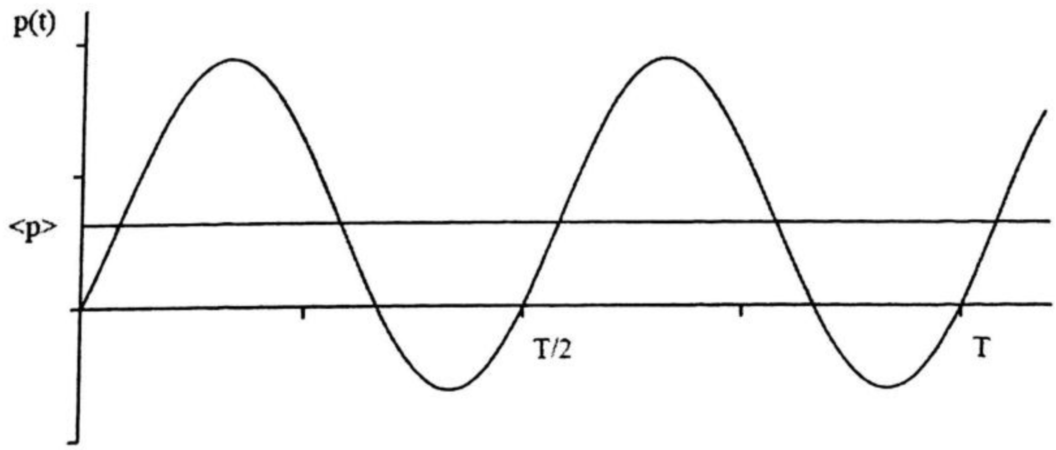
Calculons la puissance instantanée :

$$p = i(t)u(t) = UIsin(wt + \varphi)sin(wt) = \frac{1}{2}\, UI(cos(\varphi) - cos(2wt + \varphi))$$

La puissance instantanée apparaît donc comme la somme d'un terme constant et d'une fonction sinusoïdale de fréquence double. Le terme constant est la puissance moyenne reçue par le dipôle sur une période :

$$\boxed{P = \langle p \rangle = \int_0^T pdt = \frac{1}{2}\, UIcons(\varphi)}$$

Cette quantité est également appelée puissance **active**.



On peut écrire aussi la puissance moyenne en fonction de courant effectif et la tension effective

$$\boxed{P = \langle p \rangle = \frac{1}{2}\ UIcos(\varphi) = \frac{U}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}}\ cos(\varphi) = U_{eff}I_{eff}cos(\varphi)}$$

Le terme S= $U_{eff}I_{eff}$ est appelé la puissance apparente

Le terme λ=cos(φ) est appelé le facteur de puissance

b) Puissance complexe

La puissance instantanée n'étant pas une fonction sinusoïdale sa représentation complexe n'est pas autorisée. Nous introduisons toutefois une puissance complexe définie par :

$$\bar{p} = \bar{\iota}^{*}(t)\bar{u}(t) = \frac{1}{2}UIe^{j\varphi} = \frac{1}{2}\ UI(cons(\varphi) + jsin(\varphi))$$

$\bar{\iota}^{*}(t)$ est le courant conjugué de $\bar{\iota}(t)$

On note généralement P et Q les parties réelle et imaginaire de la puissance complexe :

$$\boxed{\bar{p} = P + jQ = Se^{j\varphi}}$$

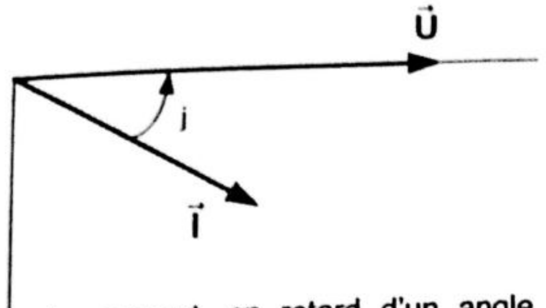
$P\ = \frac{1}{2}\ UIcons(\varphi)$ est la puissance active

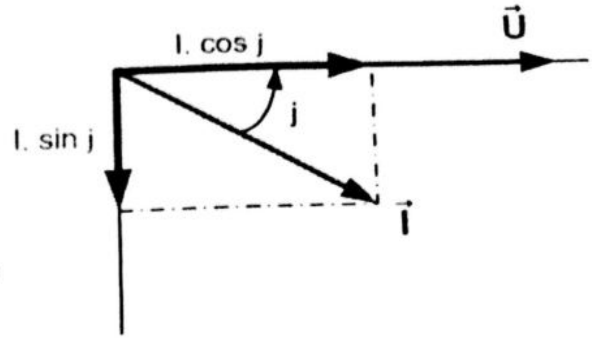
$Q = \frac{1}{2}\ UIsin(\varphi)$ est la puissance réactive

$S = |\bar{p}| = \frac{1}{2}\ UI$ est la puissance apparente : c'est la valeur maximale qui peut être prise par la puissance active

Représentation :

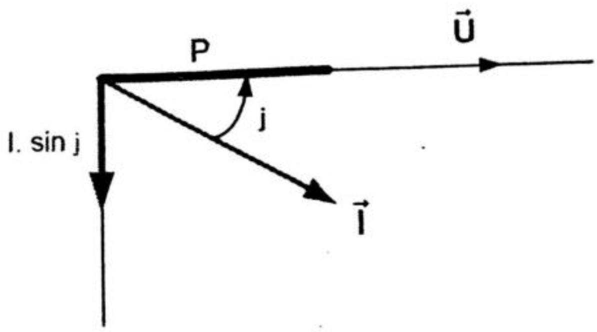
En prenant la tension comme référence et en positionnant le courant par rapport à celle ci le graphe de Fresnel de la situation donne



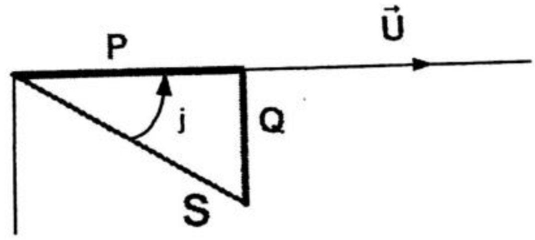


Le courant, en retard d'un angle de déphasage j , Peut être graphiquement décomposé en deux composantes.

Il est alors possible de superposer l'image de la puissance active
P = U.I.cos j à la composante I cos j



On obtient ainsi un triangle rectangle à partir duquel, en s'appuyant sur le théorème de Pythagore, on tire la relation entre P, Q et S



Les relations entre les trois puissances peuvent s'écrire :

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

On peut également en appliquant les règles de trigonométrie relatives au triangle rectangle extraire les formules suivantes

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{Q}{P}} \qquad \sin\varphi = \frac{Q}{S}$$

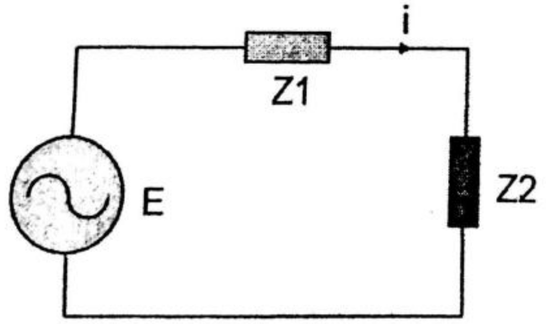
c) FACTEUR DE PUISSANCE

Le facteur de puissance est **le rapport entre la puissance active et apparente**. Il est égal au cosinus de l'angle de **déphasage φ.**

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S}}$$

4-8 Adaptation d'impédance

Considérons une source de tension sinusoïdale réelle modélisée par sa f.e.m. $\bar{E}(t)$ et son impédance interne Z1. Ce générateur est connectée à une charge d'impédance Z2. La question qui ce pose qu'elle est la valeur de Z_2 pour que la puissance reçu soit maximum.



Z1 = R1 + jX1

Z2 = R2 + jX2

Calculons la puissance complexe reçue par la charge :

$$\bar{p} = \bar{\imath}^{*}(t)\bar{u}(t) = \frac{1}{2}Z_2\bar{\imath}^{*}(t)\bar{\imath}(t) = \frac{1}{2}Z_2|\bar{\imath}|^2 = \frac{1}{2}Z_2 I^2$$

Or on a :

$$\bar{\imath} = \frac{\bar{E}}{Z_1 + Z_2}$$

En multiplie les deux membres par leur conjugués on trouve :

$$I^2 = \frac{E^2}{|Z_1 + Z_2|} = \frac{E^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

Donc la puissance complexe devient :

$$\bar{p} = \frac{1}{2}Z_2 I^2 = \frac{1}{2}\frac{R_2E^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j\frac{X_2E^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

La partie réelle est la puissance active et c'est Puissance utile reçue par Z_2 :

$$P = \frac{1}{2}\frac{R_2E^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

La dérivé de cette relation par rapport à X_2 nous donne :

$$\frac{\partial P}{\partial X_2} = \frac{(X_1 + X_2)R_2E^2}{[(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2]^2}$$

Cette équation s'annule pour :

$$\frac{\partial P}{\partial X_2} = 0$$

$$X1 = -X2$$

Dans ce cas la puissance active devient :